2023 高一數學

寒假自學教材

高一_____班_____號__________

關於數學寒假假期自學　　112.01.08

各位小綠綠好，相信在經過一個學期的數學學習後，你應該會發現**數學直觀(sense)、生活化的一面**。很高興接著要登場的高一下數學內容，其生活化的特質又更加強了！所以老師可以在一開始利用寒假，讓大家**畫一些美麗的數學相關圖形**；也能夠用一些**思考問題**讓同學利用空閒時間好好想清楚，這會是一個挺恰當的數學修習之暖身。

經歷過上一次的自學，你們是不是已經體會「自學」對一個人真正的幫助呢？要進行這種假期自學，並不需要補習的超前進度來幫忙；相反地，那樣的學生反而因過早揭曉謎底而喪失一些挖掘的樂趣。要從自學中有所吸收，只需要一顆真誠好奇，亟欲探索世界奧秘的心。不必擔心自己的能力不足，每個人都能用自己的模式呈現圖像，而我們並不以美醜為評斷標準；每個人也都能對面臨的事情做判斷，高不高明不是那麼絕對，而且頭腦要越敢面對挑戰才會越進步，所以只要勇敢地去嘗試，就會在自己一路走來的生命路程中獲得滿足。

希望大家這一回的假期除了新年的歡慶外，也能從數學中受益並獲得滿滿的喜悅。有一件事你不能不知道：最近所做的人力預算調查報告顯示，高達五成企業的人力需求是下降的；但，有一種人卻異軍突起，不減反增，成為職場搶手貨，那就是融合兩種以上專長，創造新價值的『乘法人』。也就是可以想想看，假如在平面設計上引用數學元素，會起什麼『化學反應』？一個注入數學特質的專案策畫員，在『質變』下又會創造出多大的新能量？**幾何內容從來都不專屬於數學，請大家都來練『乘法功』**。祝福每個人！期盼大家的學習歷程檔案，都能有數學的相關內容。各位小綠綠們加油！

北一女中數學教學研究會

目　次

如果你去問小學生：「數學是什麼？」，他可能會以為「數字就是數學」。然而實際上數學的分支有三：代數、幾何與分析，因此了解數字尚需幾何圖像的輔助，同時畫圖對訓練頭腦做邏輯分析也是有所幫助的。歷史留名的三大數學家之一的阿基米德，在他心中，幾何世界是永恆的。希臘傳記作家普魯塔克形容，阿基米德時常擁有「研究幾何的狂喜」，以致於當羅馬人在西元前 212 年入侵他的故鄉敘拉古時，他仍全神貫注於畫圖求解一個數學難題，而魯莽的士兵卻在定理進行到一半時揮劍殺死了阿基米德。底下我們就邊講故事，邊請同學們動手畫出一些相關的圖像。

1. 兔子繁殖的費氏數列

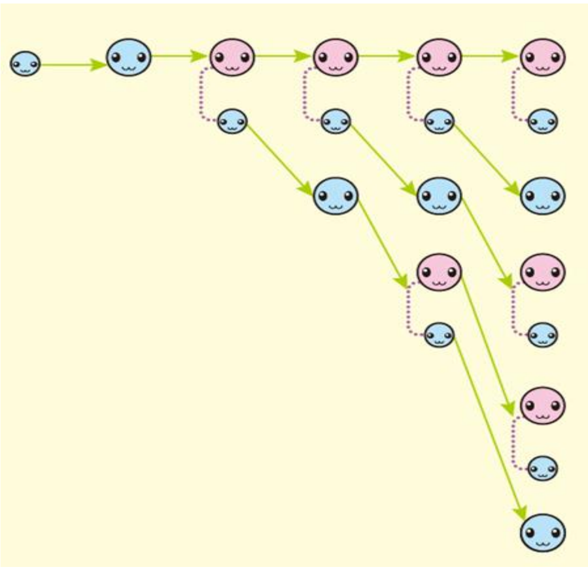
我們如何掌控有規律數列每一項的值？**除以前的等差、等比外，有一個更具一般推廣作用的描述方式---遞迴數列。因數列中相繼的項可用一個遞迴關係式（恰似一個連鎖反應）來表示，故它稱為遞迴數列。**當我們要介紹大家認識這種前面項的值直接牽動後面項的數列時，就一定不能不提下面這號人物。

13 世紀初，義大利數學家倫納德，綽號費波那契(Fibonacci, 約 1175~1250，他提倡阿拉伯數字而廣泛運用在他的代數學大作中）1202 年發表著名的算盤書, 書中以「兔子問題」最有名，由兔子的繁殖所定義出來的。內容如下：

「假設有一對雄兔與雌兔，需花一個月從幼兔長成成兔，再一個月時便可以生下一對(一雌一雄)兔子。以後，每過足一個月可以生下另一對兔子，如果每隻兔子都能健康存活，一年之後，會有多少對兔子呢？ 」

這個問題的答案就是費氏數列的第12項，底下老師畫出前面6個月的兔子數，你是否可以接著畫後面第7、8、9個月的情形？並觀察費氏數列有何前後項關聯？

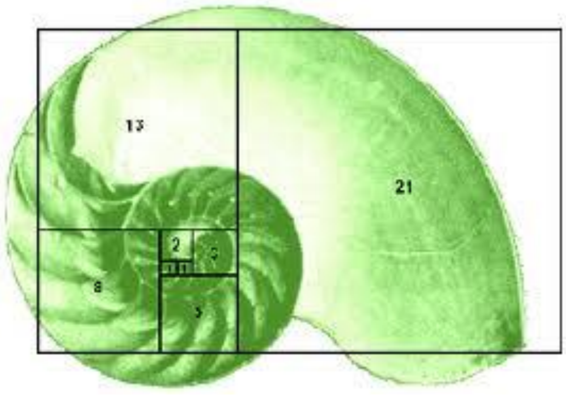
【動手做做看】：

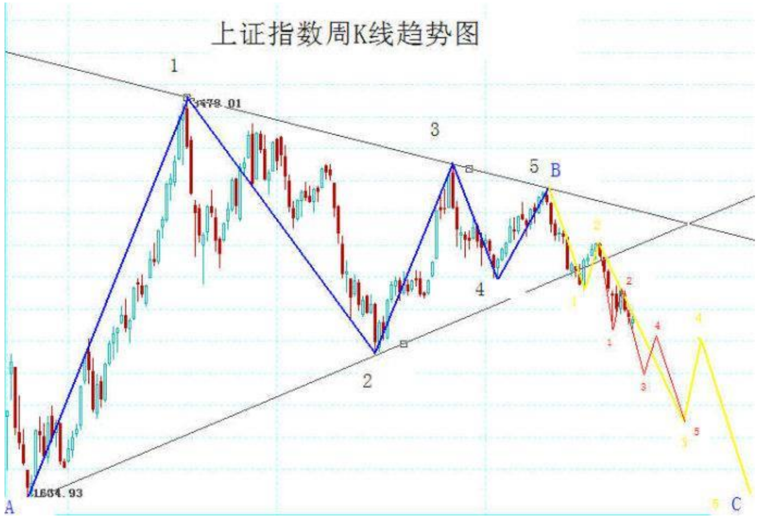


費氏數列的前幾項為：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，

你可觀察出費氏數列的前後項關係為何：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

在自然界中，一花一果都看得到費氏數列和黃金比例的身影。底下是自然界中的鸚鵡螺和人類社會的股票指數，很有意思的，都看得到費氏列的數值分布。





問題 1.請自行上網查為何費氏數列與黃金比例有關係？請簡述理由。

2. 像雪花一般的碎形

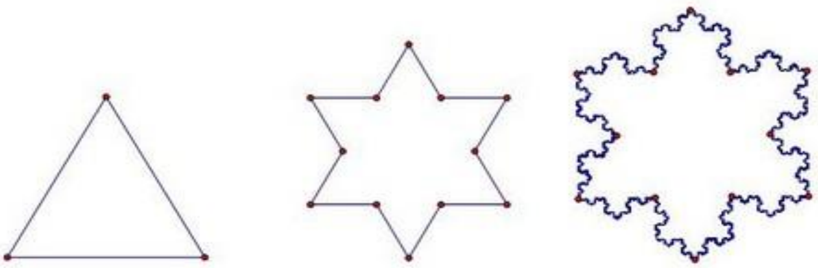
英國的海岸線長度是 1 萬 8 千公里，還是 3 萬 6 千公里？或者甚至更長？令人驚訝的是，這個問題的答案一點都不顯而易見，而且與直到 20 世紀中葉才發現的一種數學形狀有關。

當然，一天兩次潮汐起落讓英國海岸線長度不斷變動；但即使把海平面固定，海岸線長度仍舊不明。其間的細微差距，來自於測量海岸長度時有多精細的問題。你可以把米尺的一端接著另一支米尺的一端放置開始，然後計算環繞全國需要多少支米尺，但用這種硬式直尺會遺漏許多小尺度的細節。就算用長繩來代替直尺，也會因為繩子的粗細影響繞曲度而有長短不同的現象。所以如果你曾被問過英國的海岸線有多長，坦白說你可以任選喜歡的答案，這不就是學校裡每個人夢寐以求的那種數學題目！

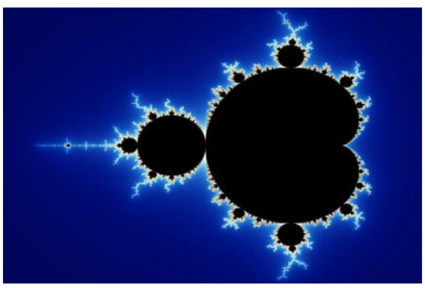
本華．曼德博

故事還沒完。1960 年，法國數學家曼德布洛特(Benoit Mandelbrot, 1924~2010) 受邀到哈佛大學經濟系演講，內容是關於他近日所作的高低所得分布研究。當他進入演講教室看到黑板上竟已先行畫著他準備講解的圖形，心神不寧，想不通別人怎會事先拿到資料？這件引人好奇的事其真相是：那些圖形與所得完全無關，其實是之前主講者所畫的棉花價格變動圖。

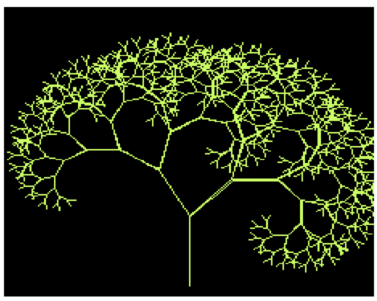
這種相似性激起曼德布洛特的好奇心，讓他發現各種不相關的經濟數據，畫圖時能呈現非常相似的形狀；而且，不論檢視哪種時間尺度(如從八年變動期改為只看八週)，形狀似乎都一樣，感覺上無論放大或縮小多少，這些形狀的複雜度似乎保持相同。於是，他在 1970 年代專門研究這種形狀，他想要叫它做碎形。碎形(fractal)這個字，原文是 frangere，有打破或弄碎的意思。**碎形一般是指「一個粗糙或零碎的幾何形狀，可以分成數個部分，且每一部分都(至少會大略)是整體縮小尺寸的形狀」，此一性質稱為自相似。**先畫一個三邊等長的正三角形，然後把它打碎，也就是每邊再分成三等份，向外畫較小的正三角形；如果我們把畫出來的點全部連接在一起，又會得到一個外形為六角星形的形狀。再繼續這種動作，就會畫出簡直像精緻雪花的圖案。



科赫雪花為常見的碎形



曼德布集合是很有名的碎形

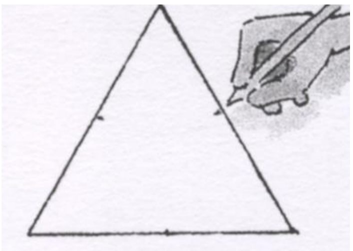
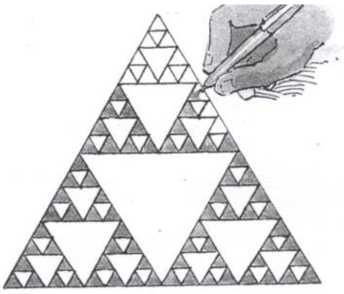


碎形樹

畫的形狀不一定要是三角形，也可以是正方形，或交錯出現，甚至不規則形都可以。不管剛開始是什麼形狀，都可以逐漸變化，重要的是，必須遵照一定的規則變化。變化的形狀永遠和剛開始的時候一樣，倘若把小的部分放大來看，還是會跟全體的形狀一樣。大自然中最突出的例子就是蕨類，它們的葉尖凹凸不平，尖端長出小葉子也是凹凸不平。除了蕨類外，大自然的碎形還有山巒、海岸線、層積雲，甚至我們的血管，都可以被視為碎形，因為這些東西的細部，都會不斷反覆它整體構造的圖形。*由於自然界中碎形比比皆是，曼德布洛特將它們喻為「自然的幾何學」。在此之前我們可能很難相信自然界的複雜樣貌能夠用簡單的數學公式創造出來！*

這些過去我們只做單純欣賞，看起來覺得很有趣的東西，現在卻對研究或解釋大自然的現象上，扮演著有用的角色。因為碎形的自然演化有其實用上的原因，像是人類肺臟的碎形特性，表示即使肺臟位於體積有限的胸腔內部，仍然有龐大的表面積，足以吸收大量氧氣。碎形為數學注入一股新鮮的空氣。理想的線條應該只有長度這個單一空間，但是，這種始終能維持凹凸不平形狀的碎形線，卻有一定程度的厚度。換句話說，它們雖然看起來是平的，事實上不平，而是具備縱與橫兩度空間的線條，因此曼德布洛特必須重新思考線與平面之間所具備的新的幾何學上的要素。

西爾平斯基填縫圖是一種碎形，它形成的方式如下：在等邊三角形的各邊標上中點，連接各邊中點，成為中央倒立的三角形。然後將中央三角形留白，在周圍的三個正立三角形上重複取中點，連接並將中央三角形留白的步驟。這步驟隨意重複多少次都可以，只要記得每回都把中央三角形留白即可。等你心滿意足時，除了每回留白的中央倒立三角形外，將其餘大大小小的正立三角形塗黑。

【動手做做看】

你的西爾平斯基填縫圖：

畫完後，關於碎形有一個有趣的思考問題：是否有可能將西爾平斯基填縫圖繪製在一個 50 元的硬幣範圍內，而它被塗黑的三角形周長和有台北到高雄的直線距離這麼長？

你的答案是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

趣味數學

- ⦿ 小綠家附近有間糖果店舉行促銷活動，3 張糖果紙可以換 1 顆糖果，1 顆糖果 1 元，1 顆糖果只有 1 張糖果紙。
  請問，15 元最多可以吃幾個糖果？

- ⦿ 接上題，小綠跟商店老闆是老朋友，可以先換糖果吃完再給糖果紙。小綠猶豫很久，最後她花了 28 元，請問她可以吃到幾顆糖果？

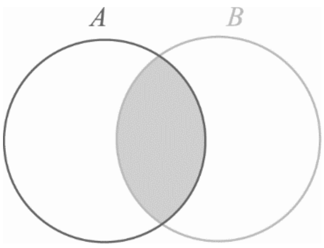
3. 表現集合關聯的文氏圖

集合是由一些滿足某些條件之事物所組成的整體，組成這個整體的每個事物叫做這個集合的**元素**．若 a 是集合 S 中的一個元素，則我們用符號 $a\in S$（讀作 a 屬於 S）表示；若 a 不是集合 S 中的元素，則用符號 $a\notin S$（讀作 a 不屬於 S）表示．特別的，不包含任何元素的集合稱為**空集合**，記作 $\varnothing$．像方程式 $x^2+1=0$ 的實數解所成集合為 $\varnothing$。

在 19 世紀，德國數學家康托（Cantor, 1845~1918）首先引進集合的概念，並利用集合的表示方式作為數學條件的敘述及關係的解釋．例如我們以 N, Z, Q, R, C 分別表示全體自然數，全體整數，全體有理數，全體實數與全體複數組成的集合．而且可以將「3 是自然數」寫成「$3\in N$」；「$\sqrt{2}$ 是實數」寫成「$\sqrt{2}\in R$」。

表示集合關係的直觀圖稱為**文氏圖**（John Venn 為 19 世紀英國哲學家與數學家，他在 1881 年發明文氏圖。），常常被用來幫助推導關於集合運算的一些規律。看到這裡，你可能會問那集合有什麼運算呢？以後在第二冊數學課本我們會詳加介紹，這裡先說一個「交集」就好。我們把集合 A 與集合 B 共同的元素組成的集合，稱為 A 與 B 的**交集**，以符號 $A\cap B$ 表示，如下圖中的一些塗深色區域。

兩個集合時



三個集合的狀況，以劍橋大學餐廳的彩色玻璃窗呈現。

【動手做做看】

以上看見兩個集合或三個集合的相交情形，要留意一下，隨著集合數目增加，相交情形會越形複雜；像是三集合 A,B,C 的相交，有兩兩相交部份：$A\cap B$、$B\cap C$、$C\cap A$，卻也有三者皆共同的 $A\cap B\cap C$；因此共要出現七塊區域。所以如果我們來考慮四個集合 A,B,C,D 的相交情形，那就非常有趣囉！到底需要交出幾塊區域呢？

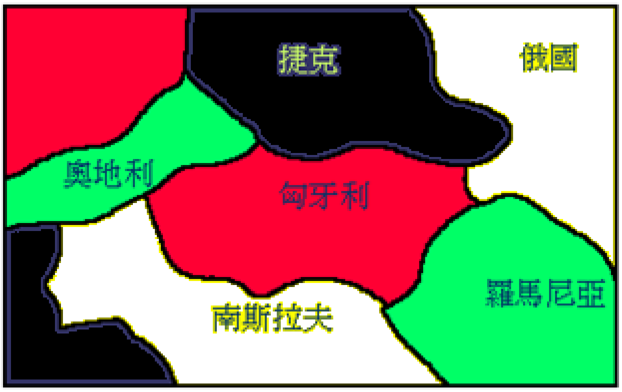
答：__________。

請畫出你認為的四集合相交文氏圖。

有人用變形蟲來稱呼它，想想看 *why*？

4. 國家分界的四色地圖

四色定理指出，每個可以畫出來的無飛地（飛地指兩個不連通區域卻隸屬同一國家）**地圖都可以用不多於 4 種顏色來上色**，上色也可簡化為標記 1,2,3,4 的數字，而且沒有兩個以邊界相接的區域會是相同顏色。這一定理最初是由英國的業餘數學家法蘭西斯・葛斯爾在 1853 年提出的猜想，直到 1976 年才在借助三台先進電腦的幫助下獲得證明。這也是第一個一定要用電腦證明的理論，對計算機的編碼程序產生推動作用。



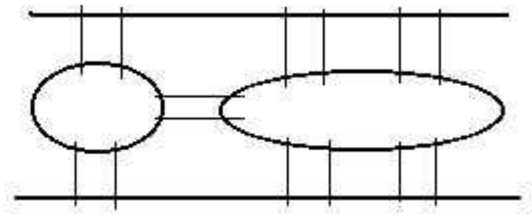
是不是真的只要四個顏色就能區分十分複雜的地圖呢？一定要自己親手試試看。底下提供歐洲捷克附近的多國地圖，大家不妨塗看看，看用了幾個顏色？能不能再比四色更少？

【動手做做看】

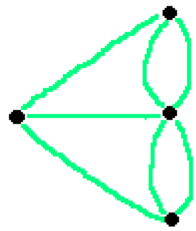
你自己要塗色的在下面：

不要管飛地，彼此相連部分你用了＿＿＿＿個顏色。

四色定理的內容隸屬於數學中的一個幾何分支：**拓樸學**，關於這分支的有趣內容還有一個七橋問題，也挺好玩的。當數學家尤拉(Euler)在 1736 年訪問 Konigsberg, Prussia(now Kaliningrad Russia，加里寧格勒俄羅斯)時，他發現當地的市民正從事一項非常有趣的消遣活動。Konigsberg 城中有一條名叫 Pregel 的河流橫經其中，在河上建有七座橋如上圖所示。



這項有趣的消遣活動是在星期六作一次走過所有七座橋的散步，每座橋只能經過一次而且起點與終點必須是同一地點。Euler 把每一塊陸地考慮成一個點，連接兩塊陸地的橋以線表示，便得如右的圖形:



Euler 後來推論出此種走法是不可能的。他的論點是這樣的，除了起點以外，每一次當一個人由一座橋進入一塊陸地（或點）時，他（或她）同時也由另一座橋離開此點。所以每行經一點時，計算兩座橋（或線），從起點離開的線與最後回到始點的線亦計算兩座橋，因此每一個陸地與其他陸地連接的橋數必為偶數。我們從 Konigsberg 七橋所成之圖形中，沒有一點含有偶數條數，因此上述的任務是不可能實現的。

動動腦

- 有 5 個朋友他們喜歡看書，所以他們看完後會輪流交換，現在有 5 本書…
  - 甲看的第四本書是丙看的最後一本書
  - 甲看的最後一本書是丁看的第二本書
  - 戊看的最後一本書是丙看的第二本書
  - 甲看的第二本書是乙看的第三本書
  - 丙看的最後一本書是戊看的第一本書
- 請問戊在看了「乙看的最後一本書」後，看了丙看的第幾本書？

柯南偵探社

柯南偵探社正在徵聘新人，小蘭和基德兩人一路過關斬將，進入最後的決選階段。主考官柯南決定測驗他們的推理能力，誰的比較高就錄取誰。

於是，柯南告訴小蘭和基德兩人，他桌子的抽屜有 16 張撲克牌，分別是：「紅桃 A、4、Q」、「黑桃 2、3、4、7、8、J」、「梅花 4、5、6、Q、K」以及「方塊 A、5」。說完後，就把手放進抽屜裡，隨機抽出一張牌蓋著，並把點數告訴小蘭，花色告訴基德。然後問兩人可不可以從已知的點數或花色中推知那張牌是什麼？

小蘭想了一下說：「我不知道！」

基德接口說：「哈，我早就知道你不知道！」

小蘭：「既然你這樣說，那現在我知道了！」

基德：「我也知道了！」