

台北市立第一女子高級中學 110 學年度 第二學期

高二數 A 期末考

範圍：第四章

一、多重選擇題：（每題10分，共30分）

1. 設 A 、 B 、 C 皆為二階方陣， I 是二階單位方陣， O 是二階零方陣，則下列各敘述哪些恆為真？

(A) 若 $AB=O$ ，則 $A=O$ 或 $B=O$

(B) 若 $A=I$ 或 $A=-I$ ，則 $A^2=I$

(C) 若 $A \neq O$ ，且 $AB=AC$ ，則 $B=C$

(D) 若 A^{-1} 存在，則 $(A+A^{-1})^2 = A^2 + 2I + (A^{-1})^2$

(E) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 。

2. 下列矩陣所對應的三元一次方程組，那些有無限多組解？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

3. $\triangle ABC$ 經過下列那一個方陣的變換後，可得出一個相等面積的三角形 $\triangle A'B'C'$ ？

(A) $\begin{bmatrix} \cos 10^\circ & \sin 10^\circ \\ -\sin 10^\circ & \cos 10^\circ \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \cos 10^\circ & \sin 10^\circ \\ \sin 10^\circ & -\cos 10^\circ \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \cos 10^\circ & \sin 10^\circ \\ \sin 10^\circ & \cos 10^\circ \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & \sin 10^\circ \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 。

二、單一選擇題：（每題 5 分，共 20 分）

1. 設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 且 $B = I + A$ ，試選出代表 $B^2 - A^2$ 的選項。

(A) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 。

2. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，且

- ① 表示往 x 方向推移 y 坐標的 2 倍。
- ② 表示往 y 方向推移 x 坐標的 2 倍。
- ③ 表示以原點為中心，往 x 方向伸縮 1 倍，往 y 方向伸縮 2 倍。
- ④ 表示以原點為中心，往 y 方向伸縮 1 倍，往 x 方向伸縮 2 倍。
- ⑤ 表示往 x 方向推移 y 坐標的 3 倍。
- ⑥ 表示往 y 方向推移 x 坐標的 3 倍。

則矩陣 A 所代表的線性變換，依序進行的變換步驟為何？

(A) ③①⑥ (B) ⑥①③ (C) ③②⑤ (D) ⑤②③ (E) ⑤④③。

3. 設二階方陣 A 、 B 滿足 $A+2B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 且 $A-B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $\det(AB) = ?$

(A) 1 (B) -1 (C) -3 (D) -5 (E) -7。

4. 設 $A(1, 1)$ 、 $B(3, 7)$ 、 $C(a, b)$ 且 $a < 0$ 為坐標平面上三點，若 $\triangle ABC$ 為正三角形，則 $a+3b = ?$

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18。

三、填充題：(共 38 分)

答對格數	1 格	2 格	3 格	4 格	5 格	6 格	7 格
得 分	8 分	16 分	24 分	32 分	34 分	36 分	38 分

- 對矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a & b \\ 2 & 3 & c & d \end{bmatrix}$ 做列運算若干次得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ ，則序對 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 設 O 、 P 、 Q 三點坐標為 $O(0, 0)$ 、 $P(3, 5)$ 、 $Q(-1, 2)$ 。若 O 、 P 、 Q 三點經過矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 線性變換後，得到新的三點 O' 、 P' 、 Q' ，則 $\overrightarrow{O'P'}$ 與 $\overrightarrow{O'Q'}$ 所張成的平行四邊形面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (1) $\begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 25 & 25 \\ 24 & -7 \\ 25 & -25 \end{bmatrix}^{2022} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{2022} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 設直線 $L: y = (\tan 75^\circ)x$ ，則點 $P(4\sqrt{3}, 2)$ 對直線 L 作鏡射後所得的點為 P' ，則點 P' 的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 設 A 為二階方陣，若 $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 且 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，則
 - $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 - $A^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

四、計算題：(共 12 分)

- 已知排球發球只有高手發球與低手發球兩種。小綠在練習排球發球時有一個習慣：當她前一球採高手發球，則下一球採高手發球的機率是採低手發球機率的 $\frac{1}{2}$ ；當她前一球採低手發球，則下一球採低手發球的機率與採高手發球的機率相等。今天的發球練習中，小綠決定 **第一球**採低手發球。
 - 求轉移矩陣 A 。(4 分)
 - 利用(1)之轉移矩陣 A ，求小綠在今天的發球練習中，第三球採低手發球的機率。(4 分)
 - 對於轉移矩陣 A ，若狀態 X 滿足 $AX = X$ ，則稱 X 為穩定狀態，此穩定狀態就是長期會趨向的狀態。
承(1)，試求小綠長期下來採低手發球的機率會趨向多少？(4 分)

台北市立第一女子高級中學 110 學年度 第二學期

高二數 A 期末考 答案卷

班級：二年_____班 座號：_____ 姓名：_____

一、多重選擇題：（每題10分，共30分）

1.	2.	3.

二、單一選擇題：（每題5分，共20分）

1.	2.	3.	4.

三、填充題：（共38分）

答對格數	1 格	2 格	3 格	4 格	5 格	6 格	7 格
得 分	8 分	16 分	24 分	32 分	34 分	36 分	38 分

1.	2.	3.(1)	3.(2)
4.	5.(1)	5.(2)	

四、計算題：（共12分）

台北市立第一女子高級中學 110 學年度 第二學期

高二數 A 期末考 答案卷

班級：二年_____班 座號：_____ 姓名：_____

一、多重選擇題：（每題10分，共30分）

1.	2.	3.
BD	DE	ABDE

二、單一選擇題：（每題5分，共20分）

1.	2.	3.	4.
A	A	E	C

三、填充題：（共38分）

答對格數	1格	2格	3格	4格	5格	6格	7格
得 分	8分	16分	24分	32分	34分	36分	38分

1.	2.	3.(1)	3.(2)
(2,0,2,2)	77	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2^{2022} & 0 \\ 0 & -2^{2022} \end{bmatrix}$
4.	5.(1)	5.(2)	
$(-5, 3\sqrt{3})$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17 \\ 2 \end{bmatrix}$	

四、計算題：（共12分）

1. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\frac{7}{12}$ (3) $\frac{3}{7}$
--