

2002 年國中盃數學能力競賽

第一階段男生筆試(一)試題 91 年 10 月 19 日

- 說明：(1)本節考試時間 100 分鐘(10 時 20 分至 12 時)。
 (2)本節試題共有四道演算推論題，每大題 10 分，共計 40 分，應寫出解題過程。
 (3)請將所有答案寫在答案卷上，否則不予計分。

試題部分：

一、設 a_1, a_2, \dots, a_{40} 等 40 個整數中，有 m 個是奇數， k 個是偶數。

(1)若 $m = 22, k = 18$ ，試證： $a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{39} + a_{40}$ 必為偶數。(4 分)

(2)將這 40 個數任意用“+”或“-”連接，

(如： $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{40}$ ，

$-a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - \dots + a_{40}$ ，

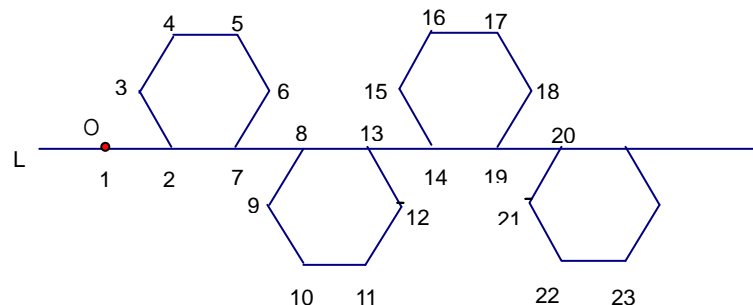
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + \dots - a_{40}$ ， 等等)

欲使連接後的算式，其值都是偶數，試求所有滿足此條件的 m 值。(6 分)

二、正 n 邊形每個內角的度數都是整數，且這個整數的各個數字和為完全平方數，試求所有滿足這兩個條件的邊數 n (10 分)

三、如下圖， O 點在直線 L 上，直線 L 上下方各有一些邊長為 1 的正六邊形。

將整數 1 標示在 O 點上，然後整數 2, 3, 4, 5, ..., 2001, 2002, ..等，依序標示在正六邊形的頂點上，形成一個路徑圖。



若整數 2002 標示的位置為 P 點，且連續兩整數所標示的位置其距離都為 1，

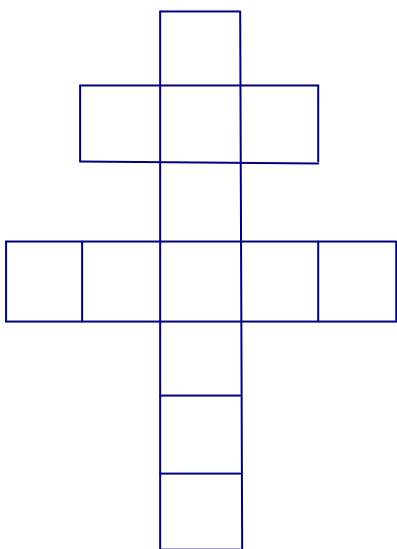
(1)試問 P 點所標示的位置是在“直線 L 上”、“直線 L 的上方”、“直線 L 的下方”三者中的哪一個？為什麼？(4 分)

(2) 試求 O 與 P 兩點的距離 \overline{OP} 。(6 分)

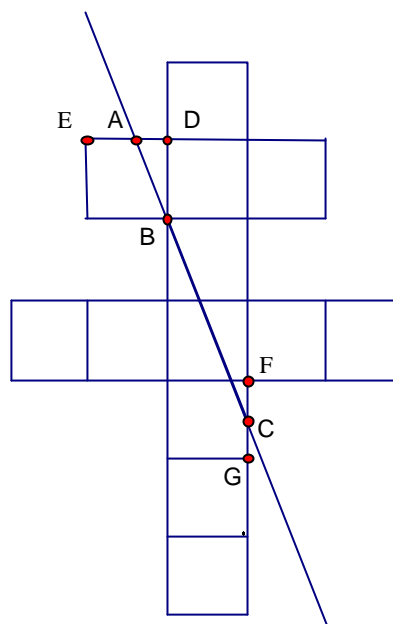
四、設圖<一>與圖<二>中的小正方形邊長都是 1，

(1)試求圖<一>中，大大小小的矩形(含正方形)共有多少個？(3 分)

(2)設 B,D,E,F,G 均為正方形的頂點，且直線 L 過 A,B,C 三點，且 A 在 \overline{DE} 邊上(非端點)，C 在 \overline{FG} 邊上(非端點)，且直線 L 將圖<一>的整個圖形面積平分(即在直線 L 的斜上方的面積等於其斜下方的面積)得圖<二>，試求 \overline{AD} 之長。(7 分)



圖<一>



圖<二>