

2002 年國中盃數學能力競賽

第一階段女生筆試(一)答案

一、(1)證明：

$$\text{令 } S = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + a_{40} ,$$

$$\text{則 } S = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{40}) - 2a_2 ,$$

又 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{40}$ 中有 22 個奇數，其和必為偶數，另 18 個為偶數，其和也是偶數，且 $2a_2$ 也必為偶數，所以 S 必為偶數。

(2)所有的 m 值為 2,4,6,.....,40 (即 1 到 40 之中的所有偶數)

推算過程：

設 $a_i, i = 1, 2, \dots, 40$ 中，係數為“-1”的總和為 M ，

而係數為“1”的總和為 N ，則任意連接後的算式其值為 $N - M$ 。

因為 $N - M = (N + M) - 2M$ ，而且 $2M$ 必為偶數

欲使 $N - M$ 恆為偶數，則 $N + M$ 為偶數，

而 $N + M$ 為 n 個偶數與 m 個奇數的和，

所以 m 必為偶數，此時 m 為 1,2,3,..,40 中的偶數，

亦即 $m = 2, 4, 6, 8, \dots, 38, 40$ 。(40 不列入亦可)

二、所有的邊數 n 為 4, 5, 8, 10, 20, 40, 180

推算過程：

$$\text{正 } n \text{ 邊形的每個內角其度數為 } \frac{180(n-2)}{n} = 180 - \frac{360}{n} ,$$

欲使內角為整數，則 n 必為 360 的因數，且 $n \neq 1, n \neq 2$ 。

下列以簡表表示 n 與其對應的內角及內角的各個數字和，

n	內角	內角數字和	n	內角	內角數字和
3	60	6	24	165	12
4	90	9	30	168	15
5	108	9	36	170	8

6	120	3	40	171	9
8	135	9	45	172	10
9	140	5	60	174	12
10	144	9	72	175	13
12	150	6	90	176	14
15	156	12	120	177	15
18	160	7	180	178	16
20	162	9	360	179	17

所以滿足條件的所有邊數 $n = 4, 5, 8, 10, 20, 40, 180$ 共 7 個。

三、(1) P 點位置：P 點在直線 L 的下方

$$(2) \overline{OP} = \sqrt{667^2 + 3} = \sqrt{444892} = 2\sqrt{111223}$$

推算過程：

(1) 1, 2, 3, ..., 2002, ... 標示後其位置有規律性；

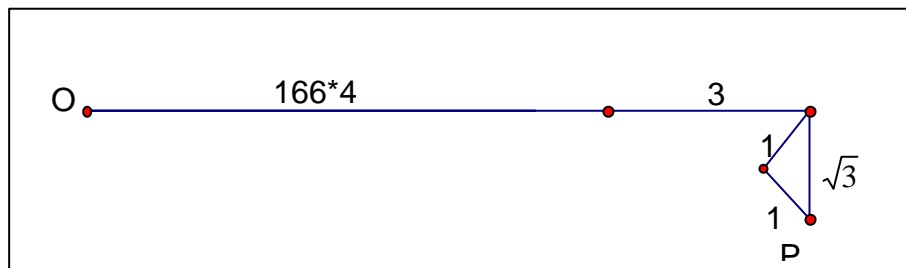
每 12 個數一組，其相對位置有循環性；

又 $2002 = 12 \times 166 + 10$ 。

即經過 166 個循環後再 10 個數，其所在的位置與 10 的位置類似。

所以，點 P 在直線 L 的下方。

(2) 點 P 的位置，其略圖如下：



$$\begin{aligned} \text{所以，P 與 O 的距離 } \overline{OP} &= \sqrt{(166 \times 4 + 3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{667^2 + 3} \\ &= \sqrt{444892} = 2\sqrt{111223}。 \end{aligned}$$

四、(1) 比值 $= \frac{2}{5}$ (2) 比值 $= \frac{n-1}{2n}$

推算過程：

(1) 設 $\triangle ABC$ 的底 $\overline{BC} = a$ ，高 $\overline{AP} = h$ ，

則易知平行於底的各線段長依序為

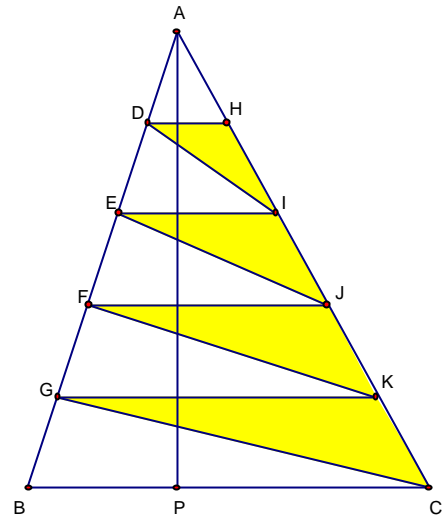
$$\frac{1}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{3}{5}a, \frac{4}{5}a, \text{ 且各平行線的距離為 } \frac{h}{5}。$$

所以，陰影三角形面積總和為

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}h \right) \left(\frac{1}{5}a + \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}a \right) = \frac{1}{2} ha \times \frac{2}{5}$$

而 $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2} ha$ ，

$$\text{所以，} \frac{S}{\triangle ABC} = \frac{2}{5}$$



(2) 若 n 等分 \overline{AB} 與 \overline{AC} 時，仿(1)，各平行線的距離為 $\frac{h}{n}$ ，

且各平行線段長依序為 $\frac{1}{n}a, \frac{2}{n}a, \dots, \frac{n-1}{n}a$ ，

因此，陰影三角形的面積總和 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}h \right) \left(\frac{1}{n}a + \frac{2}{n}a + \dots + \frac{n-1}{n}a \right)$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}h \right) \left(\frac{a}{n} \times \frac{n(n-1)}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} ha \right) \left(\frac{n-1}{2n} \right)$$

所以，面積比為 $\frac{n-1}{2n}$ 。