

2002 年國中盃數學能力競賽

第一階段男生筆試(一)答案

一、(1)證明：

$$\text{令 } S = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + a_{40} ,$$

$$\text{則 } S = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{40}) - 2a_2 ,$$

又 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{40}$ 中有 22 個奇數，其和必為偶數，另 18 個為偶數，其和也是偶數，且 $2a_2$ 也必為偶數，所以 S 必為偶數。

(2)所有的 m 值為 2,4,6,...,40 (即 1 到 40 之中的所有偶數)

推算過程：

設 $a_i, i = 1, 2, \dots, 40$ 中，係數為“-1”的總和為 M ，

而係數為“1”的總和為 N ，則任意連接後的算式其值為 $N - M$ 。

因為 $N - M = (N + M) - 2M$ ，而且 $2M$ 必為偶數

欲使 $N - M$ 恆為偶數，則 $N + M$ 為偶數，

而 $N + M$ 為 n 個偶數與 m 個奇數的和，

所以 m 必為偶數，此時 m 為 1,2,3,..,40 中的偶數，

亦即 $m = 2, 4, 6, 8, \dots, 38, 40$ 。(40 不列入亦可)

二、所有的邊數 n 為 4, 5, 8, 10, 20, 40, 180

推算過程：

$$\text{正 } n \text{ 邊形的每個內角其度數為 } \frac{180(n-2)}{n} = 180 - \frac{360}{n} ,$$

欲使內角為整數，則 n 必為 360 的因數，且 $n \neq 1, n \neq 2$ 。

下列以簡表表示 n 與其對應的內角及內角的各個數字和，

n	內角	內角數字和	n	內角	內角數字和
3	60	6	24	165	12
4	90	9	30	168	15

5	108	9	36	170	8
6	120	3	40	171	9
8	135	9	45	172	10
9	140	5	60	174	12
10	144	9	72	175	13
12	150	6	90	176	14
15	156	12	120	177	15
18	160	7	180	178	16
20	162	9	360	179	17

所以滿足條件的所有邊數 $n = 4, 5, 8, 10, 20, 40, 180$ 共 7 個。

三、(1) P 點位置：P 點在直線 L 的下方

$$(2) \overline{OP} = \sqrt{667^2 + 3} = \sqrt{444892} = 2\sqrt{111223}$$

推算過程：

(1) 1,2,3,...,2002,. 標示後其位置有規律性；

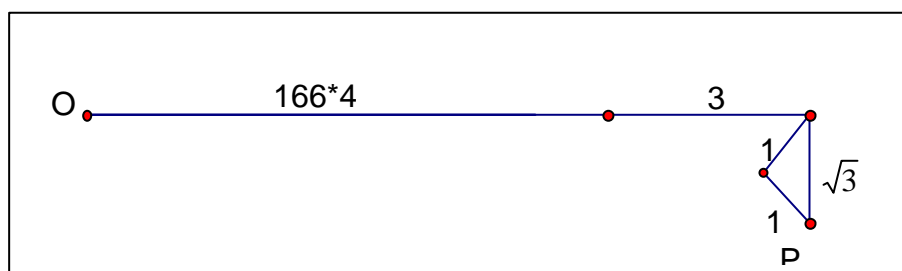
每 12 個數一組，其相對位置有循環性；

又 $2002 = 12 \times 166 + 10$ 。

即經過 166 個循環後再 10 個數，其所在的位置與 10 的位置類似。

所以，點 P 在直線 L 的下方。

(2) 點 P 的位置，其略圖如下：



$$\begin{aligned} \text{所以，P 與 O 的距離 } \overline{OP} &= \sqrt{(166 \times 4 + 3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{667^2 + 3} \\ &= \sqrt{444892} = 2\sqrt{111223}。 \end{aligned}$$

四、(1)矩形共有 47 個 (2) \overline{AD} 之長 = $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

推算過程：

(1) 矩形依面積分類

1×1----13 個	1×5----4 個
1×2----12 個	1×6----2 個
1×3----9 個	1×7----1 個
1×4----6 個	共有 47 個。

(2) 總面積為 13，由圖中的關係可知：

$$\text{若 } \overline{AD} = x, \overline{FG} = y, \text{ 則 } \Delta AHC = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(1+x)(3+y) \dots (*)$$

且 $\Delta ADB \approx \Delta CMB$ (其中 \overline{CM} 平行 \overline{AD})

$$\text{因此, } \frac{x}{1} = \frac{1}{2+y}, \text{ 即 } y = \frac{1}{x} - 2$$

$$\text{由(*)式得 } 5 = (1+x)\left(1 + \frac{1}{x}\right), \text{ 即 } 5x = (1+x)^2, \text{ 亦即 } x^2 - 3x + 1 = 0,$$

$$\text{所以, } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (\because 0 < x < 1).$$

